Oscillateur harmonique

Exercice n°1 (★)

Un ressort a une constante de raideur de $2\,N.m^{-1}$. Quelle masse faut-il accrocher à ce ressort pour les oscillations aient une pulsation de $10\,rad.s^{-1}$?

Exercice n°2 (★)

Soit une fonction $s(t)$ solution de l'équation différentielle

$$\ddot{s}(t)+\omega_0^2\times s(t)=0$$

avec pour condition initiale $s(0)=0$ et $\dot{s}(0)=2$.
Déterminer $s(t)$.

Exercice n°3 (★)

Une masse ponctuelle m est attachée entre deux ressorts identiques de longueur à vide l_0 et de raideur k. Les deux ressorts sont attachés à deux murs distants de $2l_0$.

1. Déterminer le bilan des forces exercées sur la masse m.
2. Déterminer l'équation du mouvement de la masse m.

Exercice n°4 (★★)

On rappelle l'équation différentielle vérifiée par l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\omega_0^2 x_{eq}$$

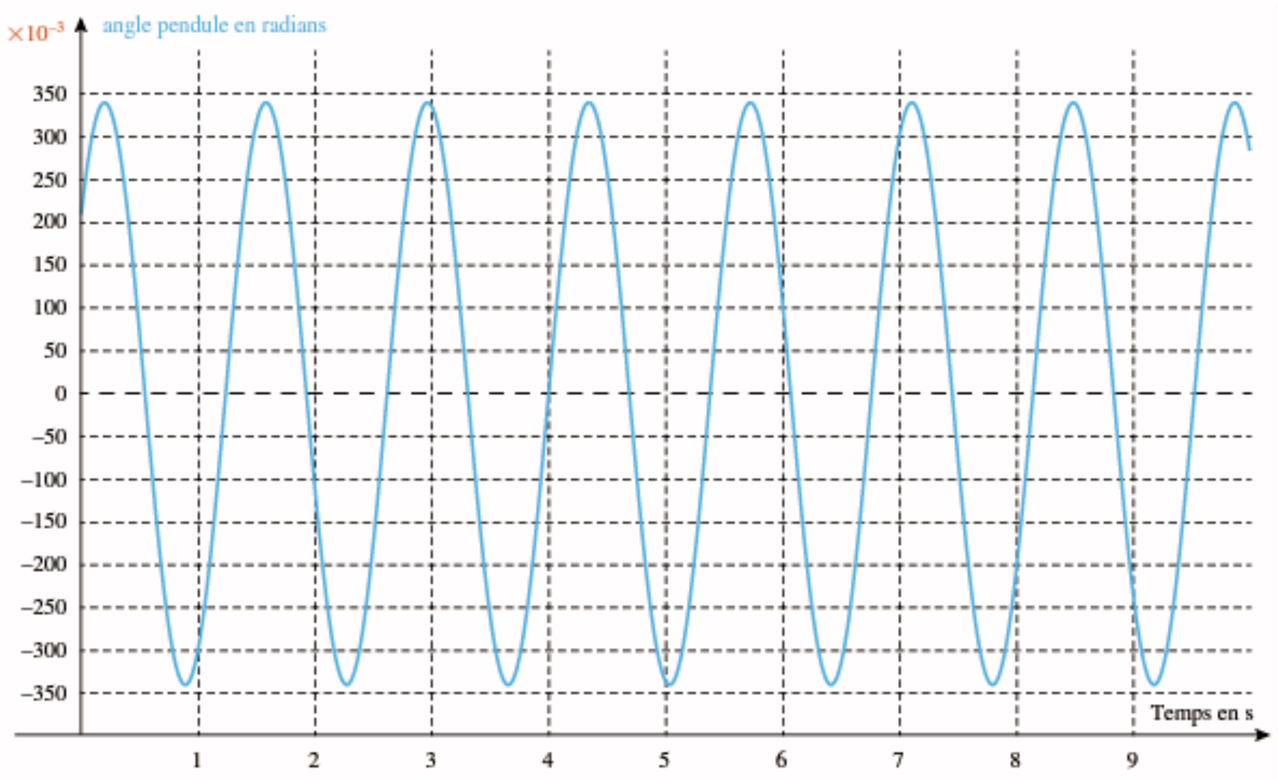
avec ω_0 et x_{eq} constantes strictement positives.

1. Montrer que la fonction $x(t)$ est solution pour date t avec :
$$x(t)=x_{eq}+X_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$$
Justifier qu'on peut toujours choisir $X_m>0$ (hors cas d'équilibre)
2. Si l'on veut utiliser un sinus à la place du cosinus, comment doit-on modifier la phase à l'origine ?
$$x(t)=x_{eq}+X_m\sin(\omega_0 t+\psi)$$
3. Montrer que la solution proposée en 1. est équivalente à :
$$x(t)=x_{eq}+A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$$
et donner la relation entre (A,B) et (X_m,φ).
4. Avec $0<X_m<x_{eq}$, tracer la courbe représentative de $x(t)$ pour les valeurs de φ suivantes : $\varphi=0\,;\frac{\pi}{2}\,;\pi\,;\frac{3\pi}{2}$

Exercice n°5 (★★)

Soit un pendule simple de longueur $L = 47\ cm$, de masse $m = 300\ g$, soumis à la pesanteur d'accélération uniforme $\vec{g}$ ($g = 9{,}81$).

1. L'enregistrement ci-dessous représente l'évolution temporelle de l'angle (θ exprimés en radians) entre le pendule et la verticale au cours du temps (t en secondes). Cette courbe traduit-elle un comportement d'oscillateur harmonique ? Justifier.

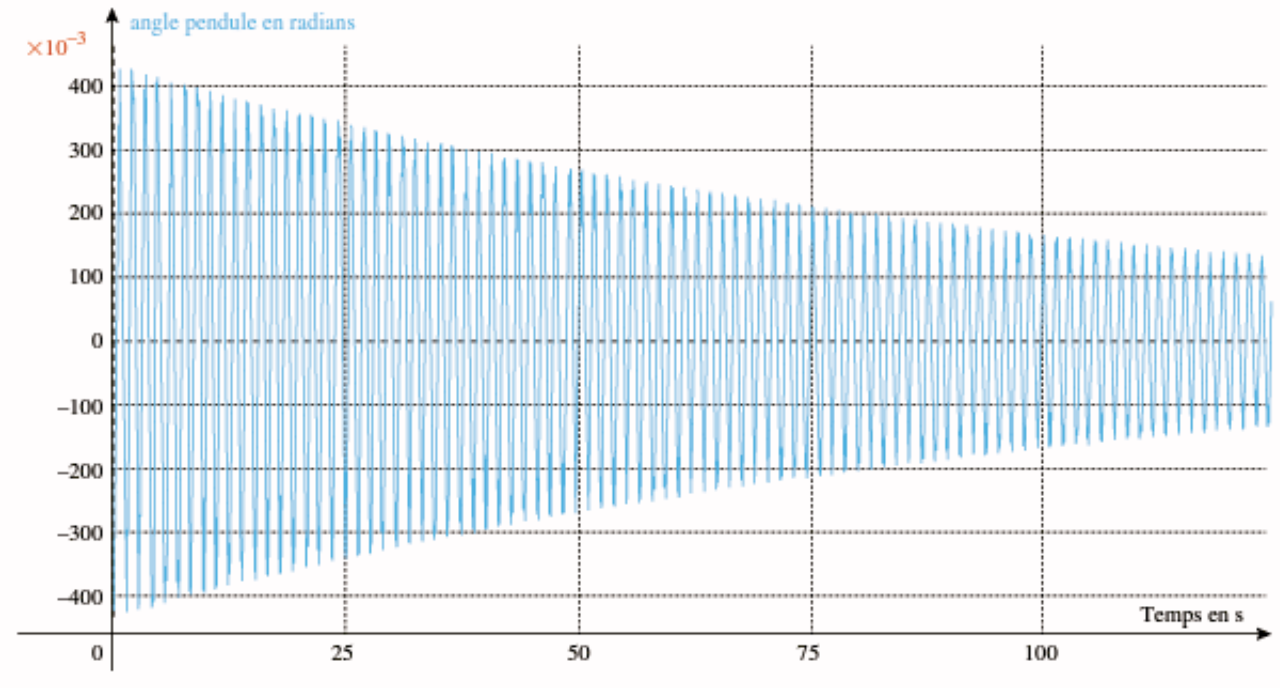


2. Par lecture graphique, déterminer : l'amplitude θ_m, la période T_0, la fréquence f_0, la pulsation ω_0, la phase à l'origine φ du mouvement du pendule simple. Comparer avec la théorie :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

3. Si l'on reproduit l'expérience avec une durée d'acquisition plus longue ($125\ s$ au lieu de $10\ s$), la courbe expérimentale a l'allure suivante.

   Observe-t-on encore un comportement d'oscillateur harmonique pur ? Quelle est la différence avec le premier enregistrement ? Quel phénomène physique, négligé sur une durée courte, faudrait-il prendre en compte pour exploiter correctement l'acquisition effectuée sur une durée longue ?



Exercice n°6 (★★)

Soit un pendule simple de longueur l, de masse m, soumis à la pesanteur d'accélération uniforme $\vec{g}$.

1. Par analyse dimensionnelle, montrer que la pulsation d'oscillation ω_0 du pendule simple est inversement proportionnelle à la racine carrée de sa longueur et indépendante de sa masse. De quelle autre grandeur dépend-elle ? Quelle est son expression exacte ?
2. Pour de petites oscillations, l'angle θ que fait le pendule avec la verticale vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$$

On impose à $t=0$ un angle initial nul et une vitesse angulaire $\dot{\theta}(t=0)=\omega_0\theta_m>0$. Déterminer l'expression de $\theta(t)$ pour $t\geq 0$.

3. Exprimer l'énergie cinétique du pendule au cours du temps sachant que

$$E_c=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Quelle est la période de $E_c(t)$?

4. Exprimer l'énergie potentielle du pendule au cours du temps sachant que

$$E_p=\frac{1}{2}mgl\theta^2$$

Quelle est la période de $E_p(t)$?

5. En déduire l'énergie mécanique du pendule simple. Se conserve-t-elle au cours du temps ?

Exercice n°7 (★ ★ ★)

Un électron de masse m et de charge $q=-e$ est piégé à l'intérieur d'un dispositif électromagnétique (région vide de charges). Il peut se déplacer uniquement dans la direction (Oy) avec une énergie potentielle

$$E_p(y)=-\frac{1}{2}\frac{qV_0}{a^2}y^2$$

Le poids est négligé ; il n'y a pas de frottements. On donne : $V_0=2\,V$ et $a=3\,mm$

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'électron sur l'axe (Oy).
2. De quel type de mouvement s'agit-il ? Déterminer la fréquence des oscillations de l'électron.

Exercice n°8 (★ ★ ★)

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est $f=8{,}5\times10^{13}\,Hz$. On donne les masses atomiques molaires ainsi que le nombre d'Avogadro :

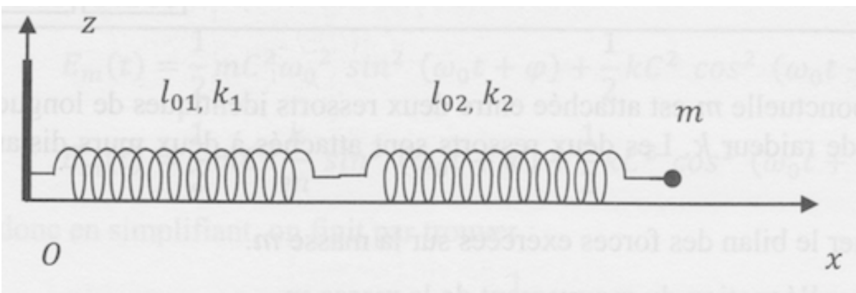
$M_H=1\,g.mol^{-1}$; $M_{Cl}=35{,}5\,g.mol^{-1}$; $\mathcal{N}_A=6{,}02\times10^{23}\,mol^{-1}$

On modélise la molécule par un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe par un « ressort » de raideur k.

1. Justifier l'hypothèse d'un atome de chlore fixe.
2. Calculer k.
3. On admet que l'énergie mécanique de la molécule est égale à $\frac{1}{2}hf$ où $h=6{,}63\times10^{-34}\,J.s$ est la constante de Planck. Calculer l'amplitude du mouvement de l'atome d'hydrogène.
4. Calculer sa vitesse maximale.

Exercice n°9 (★ ★ ★)

Une masse ponctuelle m est attachée à deux ressorts de la façon suivante :



1. Déterminer le bilan des forces exercées sur la masse m.
2. Déterminer le bilan des forces exercées sur le point sans masse situé entre les deux ressorts.
3. Déterminer l'équation du mouvement de la masse m. Conclure.